A Toolbox with DERIVE: Calculus on Several Variables

ALFONSA GARCÍA(*) alfonsa.garcia@eui.upm.es
FRANCISCO GARCÍA(*) gmazario@eui.upm.es
ANGEL MARTIN delrey@usal.es
GERARDO RODRÍGUEZ gerardo@usal.es
AGUSTÍN DE LA VILLA avilla@upcomillas.es

(*) GIEMATIC, Educational Innovation Group UPM

The student Toolbox

Individualized

Useful

Contents of a toolbox

- Tools provided by the teacher
- Tools designed by the student
- Tutorials and example-files
- A brief user manual

Always the toolbox is “UNDER CONSTRUCTION”

To be used in

Mathematical topics

Technical topics

Professional work

Differential Calculus in several Variables

Maths

- Limits and graphics
  Differential Calculus
  Composition
  Critical points
  ....
- Linear Algebra
- Calculus I
- ODE
- Statistics

Differential Calculus toolbox

Limits and graphics

The files

<u>Examples</u>

Differential Calculus toolbox

Partial Derivatives and differentiability. Tangent plane

The files

<u>Examples</u>

Differential Calculus toolbox

Chain rule

The files

Differential Calculus toolbox

Critical points. Extremes.

The files

Example

Differential Calculus toolbox

Student's survey.

Several items

Small sample

Conclusions

Positive experience

Useful for students

THANK YOU

TANGENT PLAN

En este fichero analizaremos los planos tangentes a superficies yla matriz Hessiana de una función de dos, tres y un número arbitrario de variables.

1)
a) Explicit form

Se considera una superficie z = f(x,y) expresada en forma explícita. El plano tangente a la función f en el punto P = [a,b] puede hallarse por el **siguiente procedimiento**

#1: $\text{ptangent}(a, b) := (y - b)\cdot\lim_{k\to 0} \dfrac{f(a, k + b) - f(a, b)}{k} + (x - a)\cdot\lim_{H\to 0} \dfrac{f(H + a, b) - f(a, b)}{H} + f(a, b)$

Haremos algunos ejemplos

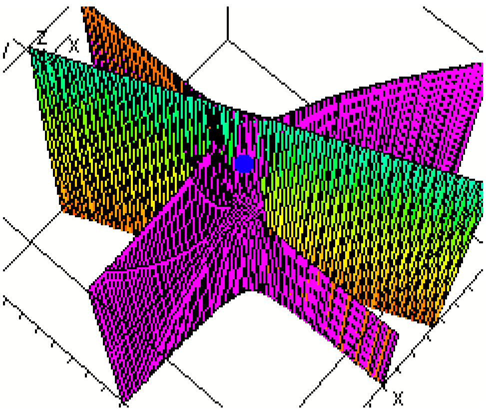
#2: $f(x, y) := x^2\cdot y^3 + x^2\cdot e^{x + y}$

#3: ptangent(1,1)

#4: ptangent(1, 1)

#5: $x\cdot(3\cdot e^2 + 2) + y\cdot(e^2 + 3) - 3\cdot e^2 - 4$

#6: [1, 1, f(1, 1)]



1)
b) Implicit form

Podemos definir el procedimiento **Ptang(f,P)** que calcula el plano tangente en el punto Pa la superficie, expresada en forma implícita, f (x,y,z)=0

Obviamente el punto **P debe verificar que f(P)=0**.

Sólo tenemos que conocer que el vector característico del plano tangente a una superficie expresada en forma implícita tiene por componentes **(fx,fy,fz)**, es decir el vector gradiente de la función f.

El vector anterior debe ser perpendicular al vector (X-P) siendo X = [x,y,z] un punto genérico del plano. Eso es lo único que expresamos en el procedimiento.

Remark: En este procedimiento el plano tangente aparece en forma implícita pero DERIVE sabe representar planos en forma implícita.

#7: $\mathrm{Ptang}(f, P) := \left(\lim_{[x, y, z] \to P} \mathrm{GRAD}(f, [x, y, z])\right) \cdot ([x, y, z] - P) = 0$

NOTA: Este procedimiento también es válido para una función en explícitas z=z(x,y) escribiendo entonces f(x,y,z)= z-z(x,y)

Veamos algunos ejemplos:

1) Hallar los planos tangentes en los puntos P1[0,0,0] y P2[1,1,2] al **paraboloide** de ecuación z=x^2+y^2

Definimos f(x,y,z)=x^2+y^2-z y el punto P1=[0,0,0]:

#8: $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z$

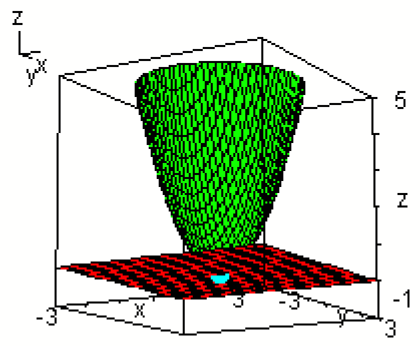
#9: $P1 := [0, 0, 0]$

#10: $\mathrm{Ptang}(f(x, y, z), P1)$

#11: $z = 0$

Representamos la superficie y el plano tangente

#12: $z = x^2 + y^2$



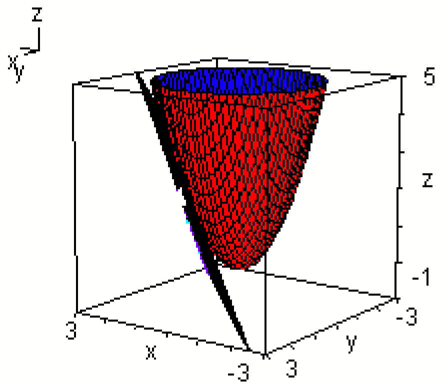
En P2= [1,1,2]:

#13: P2 ≔ [1, 1, 2]

#14: Ptang(f(x, y, z), P2)

#15: $2\cdot x + 2\cdot y - z = 2$

Representamos el punto la superficie y el plano tangente



TOOLS FOR CONDICIONATED EXTREMA

a) One restriction.

#1: multlagrange(funcion, restriccion, v) := SOLVE(GRAD(funcion + λ·restriccion, v) = 0·v, v)

Notas:
1. v es un vector formado por todas las variables de la función y por λ
2. Es importante igualar el gradiente a 0·v porque así tendremos el vector 0, con las mismas componentes que el gradiente, y se podrán igualar. Si lo igualamos a 0, considera que queremos igualar un vector a un número y nos devuelve un false.

Ejemplo 1: Hallar los puntos de la circunferencia x^2+ y^2= 45 que están respectivamente a mayor y menor distancia del punto P=(1,2).

Definimos la función a optimizar (es más cómodo trabajar con la distancia al cuadrado) y la restricción x^2+ y^2−45

#2: $f(x, y) := (x - 1)^2 + (y - 2)^2$

#3: $r(x, y) := x^2 + y^2 - 45$

#4: multlagrange(f(x, y), r(x, y), [x, y, λ])

#5: $\left(x = -3 \wedge y = -6 \wedge \lambda = -\dfrac{4}{3}\right) \vee \left(x = 3 \wedge y = 6 \wedge \lambda = -\dfrac{2}{3}\right)$

Evaluamos la función en los puntos obtenidos

#6: f(3, 6)

#7: 20

#8: f(−3, −6)

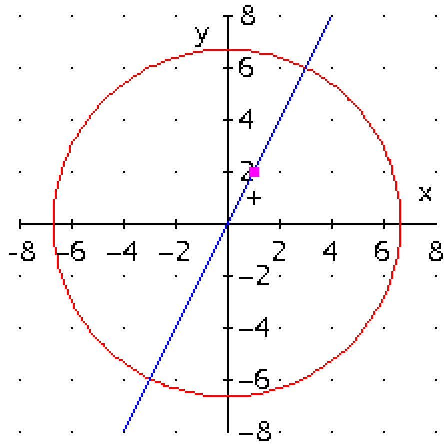
#9: 80

El máximo es $\sqrt{80}$ y el mínimo $\sqrt{20}$.
La siguiente figura obtiene "el mismo resultado" desde un punto de vista geométrico. El máximo y el mínimo serán los puntos de intersección de la circunferencia con la recta y=2x

#10: $x^2 + y^2 - 45 = 0$

#11: $y = 2\cdot x$

#12: [1, 2]



#13: $\text{SOLVE}\left(\left[x^2 + y^2 - 45 = 0,\ y = 2\cdot x\right], [x, y]\right)$

#14: $[x = 3 \wedge y = 6,\ x = -3 \wedge y = -6]$

Ejemplo 2:
Hallar el volumen máximo de una caja rectangular de caras paralelas a los planos coordenados, uno de cuyos vértices es el origen y el vértice opuesto está en el primer octante y situado en el plano 4x + 2y + z = 2 .

La función que hay que optimizar es el volumen, es decir f(x,y,z)=xyz, y la restricción es r(x,y,z)= 4x + 2y + z -2

#15: $f(x, y, z) := x\cdot y\cdot z$

#16: $r(x, y, z) := 4\cdot x + 2\cdot y + z - 2$

#17: multlagrange(f(x, y, z), r(x, y, z), [x, y, z, λ])

#18: $\left(x = \frac{1}{6} \wedge y = \frac{1}{3} \wedge z = \frac{2}{3} \wedge \lambda = -\frac{1}{18}\right) \vee \left(x = \frac{1}{2} \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0\right) \vee (x = 0 \wedge y = 1 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 2 \wedge \lambda = 0)$

Evaluamos la función en los posibles extremos

#19: f(0, 0, 2)

#20: 0

#21: f(0, 1, 0)

#22: 0

#23: $f\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

#24: 0

#25: $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

#26: $\frac{1}{27}$

El volumen máximo se obtiene en el punto **(1/6, 1/3, 2/3)**, ya que en el resto de los puntos el volumen es mínimo y vale 0, al estar los pluntos en alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 3: Hallar 4 números positivos cuya suma sea 4 y cuyo producto sea máximo

La función a optimizar es f(x,y,z,t)= xyzt y la restriccion x+y+z+t−4

#27: multlagrange(x·y·z·t, x + y + z + t − 4, [x, y, z, t, λ])

#28: $(x + y = 4 \wedge z = 0 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x + z = 4 \wedge y = 0 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x + t = 4 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 4 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 2 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 2 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = 1 \wedge t = 1 \wedge \lambda = -1) \vee (x = 0 \wedge y + z = 4 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y + t = 4 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 4 \wedge z = 0 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 2 \wedge z = 0 \wedge t = 2 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z + t = 4 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 4 \wedge t = 0 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 2 \wedge t = 2 \wedge \lambda = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 4 \wedge \lambda = 0)$

De todas las soluciones, el máximo producto se obtendrá cuando x = 1, y = 1,z = 1, t = 1, λ = −1, ya que los demás soluciones hacen que el producto sea 0, al ser al menos una de las variables 0.

NOTA: En muchas ocasiones el sistema de ecuaciones que nos da la solución de un problema de extremos condicionados no se puede resolver con Derive, ya que los sistemas derivados de la función lagrangiana no siempre son sencillos.

Utilizando el mismo problema de distancias mínima y máxima al punto (1,2), si definimos la función de distancias como la raíz cuadrada, en vez de simplificarlo por ser la raíz una función creciente, el sistema que resulta, Derive nos lo deja indicado:

#29: $\text{multlagrange}(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},\ x^2+y^2-45,\ [x, y, \lambda])$

#30: $2\cdot\lambda\cdot x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y+5}+x=1 \wedge 2\cdot\lambda\cdot y\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y+5}+y=2 \wedge x^2+y^2=45 \wedge x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y \neq -5$

b) Several restrictions

restlagrange(funcion, r, v)
r: Vector with the restrictions multiply for the parameters
v: Vector with variables and parameters

#31: restlagrange(funcion, r, v) := SOLVE(GRAD(funcion + ∑(r), v) = 0·v, v)

Ejemplo 1: Hallar los puntos de la curva intersección del cilindro x^2 +y^2=1 y el plano x+y+z=2
cuya distancia al plano z = 0 sea máxima y mínima. Calcular dichas distancias

La función a optimizar es z y las restricciones x^2+y^2-1 y x+y+z-2
Aplicamos el procedimiento restlagrange

#32: $\text{restlagrange}\left(z,\ \left[\lambda\cdot(x^2+y^2-1),\ \mu\cdot(x+y+z-2)\right],\ [x, y, z, \lambda, \mu]\right)$

#33: $\left(x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z=\sqrt{2}+2 \wedge \lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \mu=-1\right) \vee \left(x=\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y=\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z=2-\sqrt{2} \wedge \lambda=\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \mu=-1\right)$

Las distancias son las coordenadas z de los puntos; es decir, 2+√2 (máxima) y 2-√2 (mínima)

Ejemplo 2: Hállese la mínima distancia desde el origen a la recta de ecuaciones x+y-z=1, x-y+z=2

Optimizaremos el cuadrado de la distancia, es decir x^2+y^2+z^2 es z y las restricciones x+y-z-1, x-y+z-2

Aplicamos el procedimiento restlagrange

#34: $\text{restlagrange}(x^2 + y^2 + z^2, [\lambda\cdot(x + y - z - 1), \mu\cdot(x - y + z - 2)], [x, y, z, \lambda, \mu])$

#35: $x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{1}{4} \wedge z = \frac{1}{4} \wedge \lambda = -\frac{5}{4} \wedge \mu = -\frac{7}{4}$

La distancia es el módulo del vector que va del (0,0,0) al (3/2, -1/4, 1/4):

#36: $\sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)}$

#37: $\frac{\sqrt{38}}{4}$